

数 学

1. 次の各問いに答えよ。

(1) $\sqrt{3}$ の小数部分を a とするとき、 $\frac{(a+1)x+(a-1)y}{a+1}=a-1$ となるような有理数 x, y の値を求めよ。

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき、 $\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{(\sin^4\theta+\cos^4\theta)(\sin^6\theta+\cos^6\theta)}$ の値を求めよ。

(3) $\triangle OAB$ において、辺 OA を $2:1$ に内分する点を C 、辺 OB を $1:2$ に内分する点を D とし、線分 AD と線分 BC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。

(4) 不等式 $(\log_4 x)^2 < \log_4 x^4 + 12$ を解け。

(5) $1, 2, 3, 4, 5, 6$ の整数が1つずつ書かれた6枚のカードがある。このカードを袋に入れて、よく混ぜてから3枚のカードを同時に取り出す。取り出したカードのうち、一番大きい整数を X とするとき、 X の期待値を求めよ。

(6) 次の2問のうちどちらか1問を選択して解答せよ。解答用紙には選択した問題の番号を記入せよ。

1) 複素数平面上の2点 $A(1+2i)$ 、 $B(3-i)$ がある。線分 AB を $2:1$ に内分する点を表す複素数を求めよ。ただし、 i は虚数単位とする。

2) 数列 $\{b_n\}$ が $b_1=8$ 、 $b_{n+1}=b_n^3$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を満たすとき、 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

2. a は定数とする。座標平面において、直線 $y=ax-4a$ …① と曲線 $y=|4x-x^2|$ …② が異なる3つの共有点をもつ。このとき①と②で囲まれた2つの部分の面積の和を S とする。次の各問いに答えよ。

(1) ①と②が異なる3つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

(2) ①と②の共有点の座標を求めよ。

(3) S を a を用いて表せ。

(4) S が最小になるような a の値を求めよ。

数

2

3. a は定数とする。次の手順で、 x についての方程式 $|2|x-1|-1|=a$ の異なる実数解の個数を調べたい。次の文章中の空欄に式または値を入れよ。

『 $y=|2|x-1|-1|$ …① とする。

[1] $x < 1$ のとき

$$y = \boxed{\quad} (1)$$

1) $x < \boxed{\quad} (2)$ のとき $y = \boxed{\quad} (3)$

2) $\boxed{\quad} (2)$ と同じ $\leq x < 1$ のとき $y = \boxed{\quad} (4)$

[2] $x \geq 1$ のとき

$$y = \boxed{\quad} (5)$$

1) $1 \leq x < \boxed{\quad} (6)$ のとき $y = \boxed{\quad} (7)$

2) $x \geq \boxed{\quad} (6)$ と同じ のとき $y = \boxed{\quad} (8)$

与えられた方程式の異なる実数解の個数は、①のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に等しい。

これを調べると、

$$\boxed{\quad} (9) \text{ のとき } 0 \text{ 個,}$$

$$\boxed{\quad} (10), \boxed{\quad} (11) \text{ のとき } 2 \text{ 個,}$$

$$\boxed{\quad} (12) \text{ のとき } 3 \text{ 個,}$$

$$\boxed{\quad} (13) \text{ のとき } 4 \text{ 個}$$

となる。」